ENS de Lyon — Algèbre 1
L3 — 2023-2024

TD 11 : Représentations de groupes et caractères

Pour ce TD on pourra utiliser les résultats suivants sans démonstration :

— Si $V \cong \bigoplus_{W \in \mathcal{I}_G} W^{n_W}$ est la décomposition de V en somme directe de représentations irréductibles, alors

$$\chi_V = \sum_{W \in \mathcal{I}_G} n_W \chi_W$$

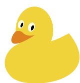
$$\text{et } n_W = \dim\left(\mathrm{Hom}_G(W, V)\right) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \overline{\chi_W(g)} \chi_V(g) = \langle \chi_W, \chi_V \rangle.$$

En particulier

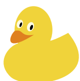
— $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = \sum_{W \in \mathcal{I}_G} n_W^2$;

— V est irréductible si et seulement si $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$;

— Deux représentations (V, ρ) et (V', ρ') sont isomorphes si et seulement si $\chi_V = \chi_{V'}$.

Les exercices marqués d'un  seront corrigés en TD, si le temps le permet.

Dans ce TD, tous les groupes sont finis, et tous les espaces vectoriels sont complexes et de dimension finie.



Exercice 1. (Représentations d'un groupe abélien)

Soit G un groupe fini. On considère uniquement les représentations complexes de G.

1. Soit (V, ρ) une représentation de G. Montrer que pour tout $g \in G$, $\rho(g)$ est diagonalisable.

2. Montrer que si G est abélien, alors les représentations irréductibles de G sont de degré 1.

3. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Donner toutes les représentations irréductibles de $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

4. On va montrer que réciproquement si toutes les représentations irréductibles de G sont de degré 1, alors G est abélien.

(a) Soit V un espace vectoriel de dimension $n := \#G$. On fixe une base $e = (e_g)_{g \in G}$ de V indexée par les éléments de G, et on fait agir G sur V de la manière suivante :

$$\forall g, h \in G, \quad g \cdot e_h = e_{gh}.$$

Cette représentation est appelée la *représentation régulière de* G. Montrer que cette définition définit bien une représentation de G.

(b) Montrer que le morphisme $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ associée est injectif (i.e. que la représentation est fidèle).

(c) On suppose que toutes les représentations irréductibles de G sont de degré 1. Grâce au lemme de Maschke, construire un morphisme injectif de G dans le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonales.

(d) En déduire que G est abélien.

Exercice 2. (Contre-exemple au lemme de Maschke)

Soient p un nombre premier, et K un corps de caractéristique p (c'est-à-dire que $p \cdot 1_K = 0_K$). On fait agir $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur K^2 par

$$a \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + ay \\ y \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que cette action définit bien une représentation de G de degré 2.

2. Écrire le morphisme $G \to \mathrm{GL}_2(K)$ correspondant à cette représentation.

3. Montrer que cette représentation ne peut pas se décomposer en somme directe de sous-représentations irréductibles.

Exercice 3. (Contre-exemple au lemme de Schur)

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que M est d'ordre 4. En déduire une représentation réelle $(\mathbb{R}^2, \rho)$ de $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

2. Montrer que (V, ρ) est irréductible en tant que représentation réelle.

3. Montrer que $\mathrm{End}_G(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R}^2$.

4. Que se passe-t-il si on considère (V, ρ) comme une représentation complexe ?

Exercice 4. (Produit hermitien invariant et théorème de Maschke)

Soit G un groupe fini et (V, ρ) une représentation de G.

1. Montrer qu'il existe un produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ invariant par G (c'est-à-dire que pour tous v, $w \in V$ et pour tout $g \in G$, $\langle \rho(g)v, \rho(g)w \rangle = \langle v, w \rangle$).

2. Soit $W \subset V$ une sous-représentation. Montrer que l'orthogonal

$$W^{\perp} := \{v \in V,\ \forall w \in W,\ \langle v, w \rangle = 0\}$$

est une sous-représentation.

3. Retrouver le théorème de Maschke.

Exercice 5. (Tordue d'une représentation)

Soit G un groupe fini, soit (V, ρ) une représentation de G, et soit $\varepsilon : G \to \mathbb{C}^{\times}$ un caractère linéaire de G.

On rappelle que la représentation V tordue par ε, notée $\varepsilon \otimes V$ est la représentation correspondant au morphisme

$$\varepsilon \otimes \rho : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V) \\ g & \longmapsto & \varepsilon(g)\rho(g) \end{array}.$$

1. Montrer que (V, ρ) est irréductible, si et seulement si la tordue $(\varepsilon \otimes V, \varepsilon \otimes \rho)$ est irréductible.

2. Calculer le caractère de $\varepsilon \otimes V$.

3. Soit $G = \mathfrak{S}_3$, $V = H_3$ la représentation standard de $\mathfrak{S}_3$ et $\varepsilon : \mathfrak{S}_3 \to \mathbb{C}^{\times}$ la signature. Montrer que H_3 est isomorphe à $\varepsilon \otimes H_3$.

Exercice 6. (Représentation régulière)

Soit G un groupe fini. On note V_G la représentation régulière de G.

1. Calculer le caractère de V_G

2. (a) Soit une représentation (V, ρ) de G vérifiant :

$$\forall g \in G, g \neq e, \ \chi_V(g) = 0.$$

Calculer le produit scalaire de χ_V et du caractère de la représentation triviale de G.

(b) En déduire que V est isomorphe à une puissance de V_G.

Exercice 7. (Représentation d'une action de groupe)

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. On définit la représentation associée à cette action de la manière suivante. On pose

$$V_X := \bigoplus_{x \in X} \mathbb{C} e_x$$

et $g \in G$ agit sur V_X par

$$g \cdot \sum_{x \in X} a_x e_x := \sum_{x \in X} a_x e_{g \cdot x}.$$

On note $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_k$ les orbites de X sous l'action de G.

1. Montrer que $\chi_{V_X}(g) = \#\{x \in X, \ g \cdot x = x\}$.
2. (a) Montrer que V_X^G est engendré par les $e_{\mathcal{O}_i} := \sum_{x \in \mathcal{O}_i} e_x$.

   (b) En déduire que le nombre d'orbites de X est égal à $\dim \left(V_X^G \right)$.

On suppose que l'action de G est transitive. La représentation V_X se décompose donc en $\mathbb{1} \oplus H$, où H ne contient pas de sous-représentation isomorphe à la représentation triviale.

3. On fait agir G sur $X \times X$ de manière diagonale. Montrer que $\chi_{V_{X \times X}} = \chi_{V_X}^2$.
4. On dit que G *agit deux fois transitivement* si pour tous couples $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times X$, avec $x_1 \neq y_1$, $x_2 \neq y_2$, il existe $g \in G$ tel que $g \cdot (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.
   Montrer que G agit deux fois transitivement si et seulement si l'action $G \curvearrowright X \times X$ a deux orbites.
5. Montrer que G agit deux fois transitivement si et seulement si $\langle \chi_{V_X}^2, \mathbb{1} \rangle = 2$, si et seulement si H est irréductible.
6. On prend l'action naturelle de $\mathfrak{S}_n$ sur $[\![1, n]\!]$.

   (a) Montrer que V_X se décompose en une somme de deux représentations irréductibles $\mathbb{1} \oplus H$.

   (b) Calculer le caractère de la représentation standard.
7. On prend l'action par translation de G sur lui-même. Calculer le caractère de la représentation régulière.

Exercice 8. (Composantes isotypiques – construction alternative)

Soit G un groupe fini. On note $\mathcal{I}_G$ l'ensemble des représentations irréductibles de G à isomorphisme près. Soit (V, ρ) une représentation de G.

Pour $W \in \mathcal{I}_G$, on pose

$$\pi_W = \frac{\dim(W)}{\#G} \sum_{g \in G} \overline{\chi_W(g)} \rho(g) \in \operatorname{End}(V).$$

1. Montrer que π_W est un morphisme de représentations.

2. Soit $U \subset V$ une sous-représentation irréductible de V. Montrer que $\pi_W\Big|_U = \lambda_U \operatorname{Id}$ avec

$$\lambda_U = \begin{cases} 1 & \text{si } U \cong W \ ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. On pose

$$V_W := \operatorname{Vect}\left(U \subset V,\ \text{sous-représentation isomorphe à } W\right).$$

Montrer que les $(V_W)_{W \in \mathcal{I}_G}$ sont des sous-représentations supplémentaires dans V.

4. Montrer que π_W est le projecteur sur V_W parallèlement à $\bigoplus_{W' \in \mathcal{I}_G,\ W' \ncong W} V_{W'}$.

5. Montrer enfin que V_W est isomorphe à une puissance de W.

Exercice 9. (Composantes isotypiques – applications)

Soit G un groupe fini.

1. Quelle est la représentation triviale-isotypique $V_{\mathbb{1}}$ d'une représentation (V, ρ) ?

2. Soient (V, ρ), (V', ρ') deux représentations de G. Soit $\varphi \in \operatorname{Hom}_G(V, V')$ un morphisme de représentations. Montrer que pour toute représentation irréductible W de G, on a $\varphi(V_W) \subset V'_W$ (on pourra utiliser l'exercice précédent).

3. Soit (V, ρ) une représentation de G dont toutes les composantes isotypiques non nulles sont irréductible. Montrer que tout élément de $\operatorname{End}_G(V)$ est diagonalisable.

Exercice 10. (Supplémentaires G-stables)

Soit G un groupe fini et soit (V, ρ) une représentation complexe de G. Soit W une sous-représentation de V.

1. On suppose que W s'écrit comme somme directe de composantes isotypiques de V. Démontrer que W admet un unique supplémentaire G-stable.

2. On suppose maintenant que W ne s'écrit pas comme somme directe de composantes isotypiques de V.

(a) Rappeler pourquoi W admet un supplémentaire G-stable, qu'on appellera S.

(b) Démontrer qu'il existe une représentation irréductible de G qui est isomorphe à la fois à une sous-représentation de W et à une sous-représentation de S.

(c) En déduire qu'il existe un morphisme de représentations non nul $f : S \to W$.

(d) Conclure que W admet une infinité de supplémentaires G-stables. (On pourra considérer les morphismes de la forme $x \mapsto x + \lambda f(x)$ sur S.)